Probabilités

Rappels de combinatoire

Permutations

Nombre de permutations possibles de n objets

$$P_n = n!$$

Arrangements

On tire p objets parmi les n, en tenant compte de l'ordre de tirage

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Combinaisons

On tire p objets parmi les n, sans tenir compte de l'ordre de tirage

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Définitions

Epreuve : protocole d'une expérience dont le résultat est aléatoire

Espace fondamental F : ensemble des résultats possibles de l'expérience

Evènement élémentaire aléatoire : un résultat possible

Evènement : sous-ensemble de F composé d'évènements élémentaires, de leur union et/ou de leur intersection

Rappel de notations

$\Omega =$ ensemble de tous les évènements possibles de toutes les épreuves possibles

$\emptyset =$ évènement impossible

$\overline{E}$: évènement contraire de E

$A \cup B$: réunion de A et B

$A \cap B$: intersection de A et B

Probabilité

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Indépendance $\quad P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Equiprobabilité $\quad P(A) = \ P(B)$

NB : Si A est constitué de k évènements distincts pris parmi N évènement équiprobables

$$P(A) = \frac{k}{N} = \frac{nbre\ de\ cas\ favorables}{nbre\ de\ cas\ possibles}$$

Probabilité conditionnelle

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P_A(B)\ P(A)}{P(B)}$$

Si A et B sont indépendants $\quad P_B(A) = P(A)$

$P_A(B) = P(B)$

Théorème de Bayes

$$P_B(A) = \frac{P_A(B)\ P(A)}{P_A(B)\ P(A) + P_{\overline{A}}(B)\ P(\overline{A})}$$

Car $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = P_A(B)\ P(A) + P_{\overline{A}}(B)\ P(\overline{A})$

Applications

Modèle probabiliste de la démarche diagnostique

Le signe S est diagnostique de la maladie M si $P_M(S) \neq P_{\overline{M}}(S)$

La probabilité qu'un sujet soit porteur de la maladie M, s'il a le signe S est déduite de l'application du théorème de Bayes

$$P_S(M) = \frac{P_M(S)\,P(M)}{P_M(S)\,P(M) + P_{\overline{M}}(S)\,P(\overline{M})}$$

$P(M)$ = prévalence de la maladie
$P_M(S)$ = sensibilité du signe S pour la maladie M
$P_{\overline{M}}(\overline{S})$ = spécificité du signe S pour le maladie M
$P_S(M)$ = valeur prédictive positive VPP
$P_{\overline{S}}(\overline{M})$ =valeur prédictive négative VPN
$P_{\overline{M}}(S)$ = proportion de faux positifs
$P_M(\overline{S})$ = proportion de faux négatifs

	M	$\overline{M}$	
S	**a**	**b**	*estimation de la VPP = a / (a+b)*
$\overline{S}$	**c**	**d**	*estimation de la VPN = d / (c+d)*

estimation de la spécificité = d / (b+d)

estimation de la sensibilité = a / (a+c)

E = facteur auquel est exposé un patient
M = maladie que l'on observe

	M	$\overline{M}$
E	**a**	**b**
$\overline{E}$	**c**	**d**

Indicateur du risque relatif

$$RR = \frac{P_E(M)}{P_{\overline{E}}(M)}$$

Si $RR > 1$ E = facteur de risque
Si $RR < 1$ E = facteur de protection
Si $RR = 1$ Pas d'association prouvée entre E et M